ÜBER DIE ZIFFERNSUMME NATÜRLICHER ZAHLEN UND VERWANDTE PROBLEME

P. Kirschenhofer, H. Prodinger und R.F. Tichy

Abstract. *This paper includes a short survey on some recent results concerning the sum of digits function followed by some new extensions to weighted sums of digits.*

1. EINLEITENDE ÜBERSICHT

Der Problemkreis des Mittelwerts der Ziffernsumme natürlicher Zahlen wurde von zahlreichen Autoren studiert:

Sei $q \geq 2$ eine natürliche Zahl und $S_q(n)$ die Ziffernsumme von n in der q-ären Darstellung. Für den Mittelwert

$$M_q(m) := \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) \tag{1.1}$$

wurden die folgenden Resultate gezeigt:

Bush [2] fand das asymptotische Äquivalent

$$M_q(m) \sim \frac{q-1}{2} \log_q m \quad , \quad m \to \infty .$$

Bellman und Shapiro [1] analysierten den Restterm genauer und erhielten

$$M_q(m) = \frac{q-1}{2} \log_q m + O(\log \log m) \quad , \quad m \to \infty .$$

Mirsky [8] verbesserte den O-Term zu $O(1)$.

Schließlich gelang es Delange [3] eine explizite Formel für das Restglied aufzustellen:

$$M_q(m) = \frac{q-1}{2} \log_q m + F(\log_q m) \tag{1.2}$$

mit einer stetigen, periodischen Funktion F mit Periode 1, deren Fourierentwicklung in [3] ebenfalls angegeben wurde. (Es wurde sogar gezeigt, daß F nirgends differenzierbar ist.) Eine Vorstufe dieses Resultats findet sich bereits in Trollope [11].

Flajolet und Ramshaw [4] gelang es, die Technik von Delange auf den Fall der $\langle q,d \rangle$-ären Darstellung natürlicher Zahlen zu übertragen: Das positionelle $\langle q,d \rangle$-System verwendet die Ziffern $\{d,d+1,\dots,d+q-1\}$ mit einer ganzen Zahl d $(2-q \leq d \leq 0)$. Weiters wurde von Flajolet und Ramshaw [4] ein entsprechendes Resultat auch für die Gray-Code-Darstellung hergeleitet.

In [7] wurde von Kirschenhofer und Tichy der Fall von Cantorschen Zahlendarstellungen betrachtet. Sei $(q(i))$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $q(0) = 1$, $q(i) \geq 2$ für $i \geq 1$ und sei weiters $Q(j) = q(0)q(1)\ldots q(j)$. Dann besitzt jede natürliche Zahl n eine eindeutige Darstellung

$$n = \sum_{j\geq 0} a_j(Q;n)\, Q(j) \quad , \quad 0 \leq a_j(Q;n) \leq q(j+1) - 1, \tag{1.3}$$

welche wir die Q-Cantordarstellung der Zahl n zur Folge $(q(i))$ nennen wollen.

In den folgenden Abschnitten der vorliegenden Arbeit werden an Stelle des Mittels der gewöhnlichen Ziffernsumme in Q-Cantordarstellung Mittel gewichteter Ziffernsummen studiert: Für $\omega = (\omega_j)_{j\geq 0}$ sei

$$M(Q,\omega;m) := \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S(Q,\omega;n) \ , \tag{1.4}$$

wobei

$$S(Q,\omega;n) := \sum_{j\geq 0} \omega_j\, a_j(Q;n)$$

ist. Einige Spezialfälle, wie etwa $\omega = ((-1)^j)_{j\geq 0}$ (d.h. die *Differenzsumme*) werden genauer untersucht.

Zum Abschluß dieser Einleitung sei auf einen Problemkreis verwiesen, der mit ähnlichen Methoden behandelt werden kann: Dabei wird an Stelle der Ziffernsumme die Häufigkeit des Auftretens einer Ziffernkette ("Wort") w als (geschlossener) Subblock in der Zifferndarstellung der Zahl n untersucht; vgl. Prodinger [9], Kirschenhofer [5], Kirschenhofer und Prodinger [6], Kirschenhofer und Tichy [7].

Eine Fülle von Literaturzitaten zu verwandten Problemen findet sich in Stolarsky [10].

2. GEWICHTETE ZIFFERNSUMMEN IN CANTORSCHEN ZAHLENSYSTEMEN

Um einen für die weiteren Untersuchungen geeigneten Ausdruck für die Ziffernsumme $S(Q,\omega;n)$ zu finden, benützen wir die folgende Identität für die Ziffern $a_j(Q;n)$ der Zahl n in Q-Cantordarstellung (vgl. (1.3)).

LEMMA 1.
$$a_j(Q;n) = \left\lfloor \frac{n}{Q(j)} \right\rfloor - q(j+1) \left\lfloor \frac{n}{Q(j+1)} \right\rfloor ,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.

Beweis. Wegen

$$n = \sum_{j\geq 0} a_j(Q;n)\, Q_j$$

haben wir

$$\left\lfloor \frac{n}{Q(j)} \right\rfloor = \sum_{k\geq j} a_k(Q;n) \frac{Q(k)}{Q(j)}$$

und

$$\left\lfloor \frac{n}{Q(j+1)} \right\rfloor = \sum_{k \geq j+1} a_k(Q;n) \frac{Q(k)}{Q(j)\, q(j+1)} ,$$

woraus das Resultat unmittelbar folgt.

Für die weiteren Betrachtungen beachten wir, daß

$$\left\lfloor \frac{n}{Q(j)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{t}{Q(j)} \right\rfloor \quad \text{für} \quad n \leq t < n+1.$$

Damit ergibt sich

$$S(Q,\omega;n) = \sum_{j \geq 0} \omega_j \left[\left\lfloor \frac{n}{Q(j)} \right\rfloor - q(j+1) \left\lfloor \frac{n}{Q(j+1)} \right\rfloor \right]$$

$$= \sum_{j \geq 0} \omega_j \int_n^{n+1} \left[\left\lfloor \frac{t}{Q(j)} \right\rfloor - q(j+1) \left\lfloor \frac{t}{Q(j+1)} \right\rfloor \right] dt$$

und

$$\sum_{n=0}^{m-1} S(Q,\omega;n) = \sum_{j \geq 0} \omega_j \int_0^m \left[\left\lfloor \frac{t}{Q(j)} \right\rfloor - q(j+1) \left\lfloor \frac{t}{Q(j+1)} \right\rfloor \right] dt.$$

Da führende Nullen keinen Beitrag zur gewichteten Ziffernsumme ergeben, kann die obige Reihe durch eine endliche Summe ersetzt werden. Es erweist sich dazu als zweckmäßig, die folgende Notation einzuführen: Für eine natürliche Zahl m bezeichnet

$$Q^*(m) = i$$

die eindeutig bestimmte ganze Zahl $i \geq 0$ mit

$$Q(i) \leq m < Q(i+1)$$

(d.h. zur Darstellung von m werden $Q^*(m)+1$ Stellen benötigt).

Mit dieser Bezeichnung ergibt sich für $j \geq Q^*(m)+1$ und $n \leq m-1$:

$$\frac{n}{Q(j)} \leq \frac{m-1}{Q(Q^*(m)+1)} < 1 .$$

Daher erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{m-1} S(Q,\omega;n) = \sum_{j=0}^{Q^*(m)} \omega_j \int_0^m \left[\left\lfloor \frac{t}{Q(j)} \right\rfloor - q(j+1) \left\lfloor \frac{t}{Q(j+1)} \right\rfloor \right] dt. \tag{2.1}$$

Wir führen nun die folgenden Hilfsfunktionen ein:

$$g_j(x) = \int_0^x \left(\lfloor q(j)\, t \rfloor - q(j) \lfloor t \rfloor - \frac{q(j)-1}{2} \right) dt \tag{2.2}$$

Die Funktionen g_j sind dann stetig, periodisch mit Periode 1 und erfüllen $g_j(0) = 0$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(2.1) erhält dann die folgende Gestalt:

$$\sum_{n=0}^{m-1} S(Q,\omega;n) = \sum_{j=0}^{Q^*(m)} \omega_j \left(m \frac{q(j+1)-1}{2} + g_{j+1}\left(\frac{m}{Q(j+1)}\right) Q(j+1) \right) .$$

Damit ist der Beweis für folgendes Lemma erbracht:

LEMMA 2.

$$M(Q,\omega;m) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq Q^*(m)+1} \omega_{j-1} (q(j)-1) + \frac{1}{m} \sum_{1 \leq j \leq Q^*(m)+1} \omega_{j-1}\, g_j\left(\frac{m}{Q(j)}\right) Q(j) .$$

Im folgenden werden wir Lemma 2 dazu benützen, um für eine größere Teilklasse von Cantorschen Zahlensystemen und Gewichtsfolgen ω den Term

$$\frac{1}{2} \sum_{1\le j\le Q^*(m)+1} \omega_{j-1}\,(q(j)-1) \tag{2.3}$$

als Hauptterm der asymptotischen Entwicklung von $M(Q,\omega;m)$ zu identifizieren.

Sei dazu zunächst $(q(i))$ *eine monotone Folge mit* $\lim_{i\to\infty} q(i)=\infty$, *und seien die Gewichte* $\omega_j\ge 0$. Dann haben wir für $j\le Q^*(m)-1$

$$\frac{Q(j)}{m} \le \frac{Q(Q^*(m)-1)}{m} = \frac{Q(Q^*(m))}{m}\,\frac{1}{q(Q^*(m))} = o(1)\ , \quad m\to\infty,$$

da $Q(Q^*(m))\le m$ und $\lim_{m\to\infty} q(Q^*(m))=\infty$. Damit erhalten wir für die folgende Teilsumme der zweiten Summe in Lemma 2 die Abschätzung

$$\left| \sum_{1\le j\le Q^*(m)-1} \omega_{j-1}\, g_j\!\left(\frac{m}{Q(j)}\right) \frac{Q(j)}{m} \right| =$$

$$o(1)\cdot \sum_{1\le j\le Q^*(m)-1} \omega_{j-1}\,\frac{q(j)-1}{2}\ ,$$

da

$$|g_j(x)| \le \frac{q(j)-1}{2}\ .$$

Damit haben wir gezeigt, daß die betrachtete Teilsumme für $m\to\infty$ asymptotisch kleiner ist als (2.3). Es bleiben noch die Summanden $j=Q^*(m)$ bzw. $j=Q^*(m)+1$ zu betrachten.

Sei zunächst $j=Q^*(m)$:

$$\left|\omega_{Q^*(m)-1}\, g_{Q^*(m)}\!\left(\frac{m}{Q(Q^*(m))}\right) \frac{Q(Q^*(m))}{m}\right| \le \omega_{Q^*(m)-1}\,\frac{q(Q^*(m))-1}{2}$$

Dies ist wiederum asymptotisch kleiner als (2.3).

Sei nun $j=Q^*(m)+1$. Dann ist

$$\left|\omega_{Q^*(m)}\, g_{Q^*(m)+1}\!\left(\frac{m}{Q(Q^*(m)+1)}\right) \frac{Q(Q^*(m)+1)}{m}\right| \le \omega_{Q^*(m)}\,\frac{q(Q^*(m)+1)-1}{2}\, q(Q^*(m)+1)$$

Im allgemeinen braucht dieser Ausdruck nicht asymptotisch kleiner als die Summe (2.3) zu sein. Es läßt sich jedoch, wie man sofort sieht, eine in vielen Fällen erfüllte Bedingung angeben, unter der dies doch der Fall ist:

SATZ 1. Für den Mittelwert der gewichteten Ziffernsumme in Cantorschen Zahlensystemen mit monoton wachsender Ziffernfolge $q(j)$ mit $\lim_{j\to\infty} q(j)=\infty$ und nichtnegativen Gewichten ω_j, die die Bedingung

$$(q(n)-1)\,\omega_{n-1} = o\!\left(\frac{1}{q(n)} \sum_{j=1}^{n} (q(j)-1)\,\omega_{j-1}\right) \tag{*}$$

erfüllen, gilt

$$M(Q,\omega;m) \sim \frac{1}{2} \sum_{1\le j\le Q^*(m)+1} \omega_{j-1}\,(q(j)-1)\ , \quad m\to\infty.$$

Wir geben nun einige Beispiele zum eben formulierten Satz 1 an:

Beispiel 1. Sei $q(n)$ eine Folge wie in Satz 1, die zusätzlich die Bedingung $q(n) = o(n)$ erfüllt (z.B. $q(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$). Sei weiters

$$\omega_{n-1} = \frac{n^\alpha}{q(n)-1} \quad \text{für } \alpha > -1 .$$

Dann ist

$$(q(n)-1)\,\omega_{n-1} = n^\alpha = o\Big(\frac{1}{q(n)} \sum_{j=1}^{n} j^\alpha\Big),$$

d.h. (*) ist erfüllt.

Analog zeigt man in den folgenden Fällen, daß (*) erfüllt ist.

Beispiel 2. Sei $q(n) = o(n \log n)$ und

$$\omega_{n-1} = \frac{1}{n\,(q(n)-1)} .$$

Beispiel 3. $q(n) = o(n^{-\alpha})$ für $\alpha < -1$ und

$$\omega_{n-1} = \frac{\cdot n^\alpha}{q(n)-1}$$

Beispiel 4. [Faktorielles Zahlensystem] $q(j) = j+1$.
Dann lautet (*) :

$$\nu_n = o\Big(\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \nu_j\Big) \quad \text{mit} \quad \nu_j = j\,\omega_{j-1} .$$

Diese Bedingung ist etwa erfüllt für die Gewichte j^α mit $\alpha \le -2$.

Beispiel 5. [Arithmetisches Mittel] $\omega_n = 1$.

Die Bedingung (*) lautet:

$$q(n) - 1 = o\Big(\frac{1}{q(n)} \sum_{j=1}^{n} (q(j)-1)\Big) ;$$

sie ist zum Beispiel für $q(j) = \lfloor j^\alpha \rfloor$ mit $0 < \alpha < 1$ erfüllt.

3. GEWICHTETE ZIFFERNSUMMEN IM q-ÄREN ZAHLENSYSTEM

In diesem Abschnitt untersuchen wir gewichtete Ziffernsummen im q-ären Zahlensystem, d.h. $q(j) = q$ und $Q(j) = q^j$.

Lemma 2 erhält dann folgende Gestalt:

KOROLLAR 1. *Der Mittelwert $M_q(\omega;m)$ der mit der Gewichtsfolge ω gewichteten Ziffernsumme $S_q(\omega;n)$ im q-ären Zahlensystem erfüllt*

$$M_q(\omega;m) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(\omega;n) = \frac{q-1}{2} \sum_{j=0}^{l} \omega_j + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l+1} \omega_{j-1}\, g\Big(\frac{m}{q^j}\Big)\, q^j , \tag{3.1}$$

mit

$$l = \lfloor \log_q m \rfloor \quad \underline{\text{und}} \quad g(x) = \int_0^x (\lfloor qt \rfloor - q \lfloor t \rfloor - \tfrac{q-1}{2})\, dt. \tag{3.2}$$

Im weiteren formen wir zunächst die zweite Summe um, indem wir $s = l+1-j$ setzen und $g(k) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ beachten:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l+1} \omega_{j-1}\, g(\frac{m}{q^j})\, q^j = \frac{1}{m} \sum_{s \geq 0} \omega_{l-s}\, g(mq^{s-l-1})\, q^{l+1-s}$$

Bezeichnen wir mit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ den Bruchteil von x, dann ist

$$q^l = m\, q^{-\{\log_q m\}}$$

und daher der obige Ausdruck

$$= \sum_{s \geq 0} \omega_{l-s}\, g(q^{s-1+\{\log_q m\}})\, q^{1-s-\{\log_q m\}} .$$

Für allgemeine Gewichtsfolgen ω ist dieser Ausdruck unübersichtlich. Wir spezifizieren daher:

Sei $\omega_j = p^j$, $p > q^{-1}$, $p \neq 1$;

dann ist

$$\omega_{l-s} = m^{\log_q p}\, p^{-s-\{\log_q m\}} ,$$

und der Term von oben wird zu

$$m^{\log_q p}\, \frac{1}{p} \sum_{s \geq 0} (pq)^{1-s-\{\log_q m\}}\, g(q^{s-1+\{\log_q m\}}) .$$

Definieren wir nun

$$h(x) = \sum_{s \geq 0} (pq)^{-s}\, g(q^s x), \tag{3.3}$$

so erhalten wir für den gewünschten Ausdruck

$$m^{\log_q p}\, \frac{1}{p}\, (pq)^{1-\{\log_q m\}}\, h(q^{\{\log_q m\}-1}). \tag{3.4}$$

Der erste Term in (3.1) ergibt sich zu

$$\frac{q-1}{2} \sum_{j=0}^{l} p^j = \frac{q-1}{2}\, \frac{p^{l+1} - 1}{p - 1}$$

$$= \frac{p(q-1)}{2(p-1)}\, m^{\log_q p}\, p^{-\{\log_q m\}} - \frac{q-1}{2(p-1)} .$$

Definieren wir

$$H(x) = \frac{p(q-1)}{2(p-1)}\, p^{-\{x\}} + \frac{1}{p}\, (pq)^{1-\{x\}}\, h(q^{\{x\}-1}) , \tag{3.5}$$

so ist $H(x)$ stetig und periodisch mit Periode 1, $H(0) = \frac{q-1}{2(p-1)}$.

Zusammenfassend ergibt sich

SATZ 2. Der Mittelwert $M_q(\omega;m)$ der mit der Folge (p^j) für $p > q^{-1}$, $p \neq 1$ gewichteten Ziffernsumme im q-ären Zahlensystem ist gegeben durch

$$M_q(\omega;m) = m^{\log_q p} H(\log_q m) - \frac{q-1}{2(p-1)},$$

wobei $H(x)$ die in (3.5) beschriebene stetige, periodische Funktion ist.

4. DIE DIFFERENZSUMME IM q-ÄREN ZAHLENSYSTEM

Als weitere Anwendung des in Abschnitt 2 hergeleiteten Lemmas 2 behandeln wir für das q-äre Zahlensystem nun die Gewichtsfolge $((-1)^j)$. (Differenzsumme, alternierende Summe, Wechselsumme)

KOROLLAR 2. Der Mittelwert $M_q(\pm;m)$ der Differenzsumme im q-ären Zahlensystem ist gegeben durch

$$M_q(\pm;m) = \frac{q-1}{2} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l+1} (-1)^j g\left(\frac{m}{q^j}\right) q^j$$

mit $l = \lfloor \log_q m \rfloor$ und $g(x)$ aus (3.2).

Der erste Term im obigen Ausdruck nimmt dabei folgende Werte an:

$$\frac{q-1}{2} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j = \begin{cases} \frac{q-1}{2} & l \text{ gerade} \\ 0 & l \text{ ungerade} \end{cases} \tag{4.1}$$

Der zweite Term kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l+1} (-1)^j g\left(\frac{m}{q^j}\right) q^j =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ gerade}}}^{l+1} g\left(\frac{m}{q^j}\right) q^j - \frac{1}{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{l+1} g\left(\frac{m}{q^j}\right) q^j .$$

Mit der Substitution $s = l + 1 - j$ ergibt sich

$$= (-1)^{l+1} \left[\frac{1}{m} \sum_{\substack{s \geq 0 \\ s \text{ gerade}}} g(mq^{s-l-1})\, q^{l+1-s} - \frac{1}{m} \sum_{\substack{s \geq 0 \\ s \text{ ungerade}}} g(mq^{s-l-1})\, q^{l+1-s} \right]$$

$$= (-1)^{l+1} \left[\sum_{\substack{s \geq 0 \\ s \text{ gerade}}} q^{1-s-\{\log_q m\}} g(q^{s-1+\{\log_q m\}}) \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{s \geq 0 \\ s \text{ ungerade}}} q^{1-s-\{\log_q m\}} g(q^{s-1-\{\log_q m\}}) \right]$$

$$= (-1)^{l+1} q^{1-\{\log_q m\}} \left[\sum_{t \geq 0} q^{-2t} g(q^{2t-1+\{\log_q m\}}) - \sum_{t \geq 0} q^{-2t-1} g(q^{2t+\{\log_q m\}}) \right]$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$h_\pm(x) = \sum_{t\geq 0} q^{-2t} g(q^{2t}x) \tag{4.2}$$

und erhalten

$$(-1)^{l+1} q^{1-\{\log_q m\}} \left[h_\pm(q^{\{\log_q m\}-1}) - \frac{1}{q} h_\pm(q^{\{\log_q m\}}) \right].$$

Wir führen zwei weitere Hilfsfunktionen ein:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{q-1}{2} + q^{1-\{x\}}\left[h_\pm(q^{\{x\}-1}) - \frac{1}{q} h_\pm(q^{\{x\}}) \right] \\ H_2(x) &= - q^{1-\{x\}}\left[h_\pm(q^{\{x\}-1}) - \frac{1}{q} h_\pm(q^{\{x\}}) \right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mit dieser Notation ist dann

$$M_q(\pm;m) = \begin{cases} H_1(\log_q m) & \text{für } \lfloor \log_q m \rfloor \text{ gerade} \\ H_2(\log_q m) & \text{für } \lfloor \log_q m \rfloor \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Diese Darstellung läßt sich noch vereinfachen: Sei

$$H_\pm(x) = \begin{cases} H_1(x) & \text{für } \lfloor x \rfloor \text{ gerade} \\ H_2(x) & \text{für } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Man sieht sofort, daß $H_\pm(x)$ periodisch mit Periode 2 ist.

Weiters ist $H_\pm(x)$ stetig:

$$H_\pm(0+) = H_1(0+) = \frac{q-1}{2} + q\left[h_\pm(\tfrac{1}{q}) - \frac{1}{q} h_\pm(1) \right]$$

Da $g(k) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$, ist $h_\pm(1) = 0$ und

$$h_\pm(\tfrac{1}{q}) = g(\tfrac{1}{q}) = -\frac{q-1}{2q},$$

sodaß

$$H_\pm(0+) = 0.$$

Weiters ist

$$H_\pm(1-) = H_1(1-) = \frac{q-1}{2} + h_\pm(1) - \frac{1}{q} h_\pm(q).$$

Nun ist $h_\pm(q) = 0$ und daher

$$H_\pm(1-) = \frac{q-1}{2}.$$

Außerdem ist

$$H_\pm(1+) = H_2(1+) = H_2(0+) = -q\left[h_\pm(\tfrac{1}{q}) - \frac{1}{q} h_\pm(1) \right] = \frac{q-1}{2} = H_\pm(1-).$$

Schließlich ist

$$H_\pm(2-) = H_2(2-) = H_2(1-) = -\left[h_\pm(1) - \frac{1}{q} h_\pm(q) \right] = 0 = H_\pm(0+).$$

Damit haben wir folgenden Satz vollständig bewiesen:

SATZ 3. Für den Mittelwert $M_q(\pm;m)$ der Differenzsumme im q-ären Zahlensystem gilt:

$$M_q(\pm;m) \;=\; H_\pm(\log_q m)$$

mit einer stetigen, periodischen Funktion $H_\pm$ mit Periode 2 und $H_\pm(0) = 0$.

Im weiteren werden die Fourierkoeffizienten der Funktion $H_\pm(x)$ bestimmt. Es ist

$$H_\pm(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, e^{k\pi i x}$$

mit

$$h_k = \frac{1}{2}\int_0^2 H_\pm(x)\, e^{-k\pi i x}\, dx = a_k + b_k + c_k ,$$

wobei (für $k \neq 0$, $k = 0$ wird später diskutiert)

$$a_k = \frac{q-1}{4}\int_0^1 e^{-k\pi i x}\, dx = (1-(-1)^k)\frac{q-1}{4k\pi i} ,$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^1 q^{1-\{x\}}\, h_\pm(q^{\{x\}-1})\, e^{-k\pi i x}\, dx - \frac{1}{2}\int_1^2 q^{1-\{x\}}\, h_\pm(q^{\{x\}-1})\, e^{-k\pi i x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(1-(-1)^k)\int_0^1 q^{1-x}\, h_\pm(q^{x-1})\, e^{-k\pi i x}\, dx$$

und

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_0^1 q^{-\{x\}}\, h_\pm(q^{\{x\}})\, e^{-k\pi i x}\, dx + \frac{1}{2}\int_1^2 q^{-\{x\}}\, h_\pm(q^{\{x\}})\, e^{-k\pi i x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(1-(-1)^k)\int_1^2 q^{1-x}\, h_\pm(q^{x-1})\, e^{-k\pi i x}\, dx.$$

Daher ist $h_k = 0$ für k gerade, $k \neq 0$. Für k ungerade ergibt sich

$$b_k + c_k = -\int_0^2 q^{1-x}\, h_\pm(q^{x-1})\, e^{-k\pi i x}\, dx$$

$$= -\frac{2}{q}\int_0^1 (q^2)^{1-x}\, h_\pm(q^{2x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx$$

$$= -\frac{2}{q}\sum_{t\geq 0}\int_0^1 q^{-2t+2-2x}\, g(q^{2t+2x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx.$$

Mit der Substitution $u = q^{2t+2x-1}$ erhalten wir

$$b_k + c_k = \frac{1}{\operatorname{Log} q}\int_{1/q}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2}\exp(-2k\pi i \log_q u)\, du$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Log} q}\, G\!\left(1 + \frac{k\pi i}{\operatorname{Log} q}\right) ,$$

mit

$$G(s) = \int_{1/q}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}}\, du \qquad \text{für } \operatorname{Re} s > 0.$$

In [3;(12)] hat Delange gezeigt:

$$G(s) = -\frac{q-1}{2}\frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1}-q}{s(s-1)}\zeta(s-1)$$

für $\mathrm{Re}\, s > 0$, $s \neq 1$. Setzt man in diese Formel ein, erhält man h_k für k ungerade. Schließlich bestimmen wir noch h_0: Wegen

$$H_\pm(0) = h_0 + \sum_{s\in\mathbb{Z}} h_{2s+1} = 0$$

und

$$H_\pm(1) = h_0 - \sum_{s\in\mathbb{Z}} h_{2s+1} = \frac{q-1}{2}$$

gilt

$$h_0 = \frac{q-1}{4}.$$

SATZ 4. *Die Fourierentwicklung der periodischen Funktion $H_\pm(x)$ aus Satz 3 ist gegeben durch*

$$H_\pm(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, e^{k\pi i x}$$

mit

$$h_0 = \frac{q-1}{4}$$

bzw.

$$h_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade, } k \neq 0 \\ \frac{q+1}{k\pi i}\,\zeta\!\left(\frac{k\pi i}{\log q}\right)\left(1+\frac{k\pi i}{\log q}\right)^{-1} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

LITERATUR

[1] R. BELLMAN, H.N. SHAPIRO, On a problem in additive number theory, Ann. Math. Princeton II 49 (1948), 333-340.

[2] L.E. BUSH, An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, Amer. Math. Monthly 47 (1940), 154-156.

[3] H. DELANGE, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", L'Enseignement math. 21 (1975), 31-77.

[4] P. FLAJOLET, L. RAMSHAW, A note on Gray Code and Odd-Even Merge, SIAM J. Comput. 9 (1980), 142-158.

[5] P. KIRSCHENHOFER, Subblock occurrences in the q-ary representation of n, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 4 (1983), 231-236

[6] P. KIRSCHENHOFER, H. PRODINGER, Subblock occurrences in positional number systems and Gray code representation, J. Inf. Optim. Sci. 5 (1984), 29-42.

[7] P. KIRSCHENHOFER, R.F.TICHY, On the distribution of digits in Cantor representations of integers, J. Number Th. 18 (1984), 121-134.

[8] L. MIRSKY, A theorem on representations of integers in the scale of r, Scripta Math., New York 15 (1949), 11-12.

[9] H. PRODINGER, Generalizing the sum of digits function, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 3 (1982), 35-42.

[10] K.B. STOLARSKY, Power and exponential sums of digital sums related to binomial coefficient parity, SIAM J. Appl. Math. 32 (1977), 717-730.

[11] J.R. TROLLOPE, An explicit expression for binary digital sums, Math. Mag. 41 (1968), 21-25.

Peter Kirschenhofer
Institut für Algebra
und Diskrete Mathematik,
Abteilung für
Diskrete Mathematik,
Technische Universität
Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 WIEN

Helmut Prodinger
Institut für Algebra
und Diskrete Mathematik,
Abteilung für
Theoretische Informatik,
Technische Universität
Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 WIEN

Robert F. Tichy
Institut für Analysis,
Technische Mathematik und
Versicherungsmathematik,
Abt.f.Techn. Mathematik,
Technische Universität
Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien